

Φυλλάδιο 3.

5.1. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$y' = 1 - (\sin^2 x)y^4, \quad y(0) = 0$$

έχει λύση για όλα τα $x \in \mathbf{R}$.

5.2. Στο παράδειγμα 5.1 εφαρμόσαμε μια διαδικασία που μας έδωσε την ολική λύση του προβλήματος (5.2). Γιατί δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία για το πρόβλημα

$$\frac{dy}{dx} = y^n, \quad y(0) = 1 \quad \text{για } n > 1;$$

5.3. Διαπιστώστε ότι το πρόβλημα

$$y' = \sin \ln(1 + y^2), \quad y(0) = 1$$

έχει ολική λύση σε τυχαίο (a, b) (που περιέχει το μηδέν).

5.4. Έστω ότι η $f(x, y)$ είναι μια συνεχής ως προς x και συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς y συνάρτηση τ.ω.

$$(5.2) \quad |f(x, y)| \leq C(1 + |y|)$$

όπου C μια δοσμένη σταθερά. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

έχει λύση για όλα τα $x \in \mathbf{R}$. Δώστε ένα παράδειγμα μιάς μη γραμμικής ως προς y συνάρτησης η οποία επαληθεύει την (5.2).